ROMANIA
MINISTERUL EDUCATIEI NAȚIONALE
COLEGIUL NATIONAL ALEXANDRU IOAN CUZA
Strada Cuza-Voda nr. 47, Focsani 620034, Vrancea, Romania
Tel. 0040.237.226.840 Fax: 0337100243 E-mail: collegecnaic@yahoo.com,Web:www.cnaic.ro

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Vrancea, 16.02.2019

Clasa a X-a filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţe ale naturii

SUBIECTUL 1

Fie numărul complex z care verifică relația $z^2 + z + 1 = 0(*)$.

a) Să se calculeze $z^{2019} + \frac{1}{z^{2019}}$

b) Să se calculeze $z^n + \frac{1}{z^n}$, pentru n număr natural.

c) Dacă z_1, z_2 sunt soluțiile ecuatiei (*), să se determine numerele naturale n pentru care are loc egalitatea ${z_1}^2 + {z_2}^2 = 2$.

SUBIECTUL 2

a) Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Să se arate că dacă $f \circ g$ este funcție injectivă, atunci g este functie injectivă și dacă $f \circ g$ este funcție surjectivă, atunci f este funcție surjectivă.

b) Se consideră funcția $f : \mathbf{R}\setminus\{4\} \to \mathbf{R}\setminus\{3\}, f(x) = \frac{3x-1}{x-4}$. Arătați că este funcție inversabilă și determinați inversa ei.

SUBIECTUL 3

Se consideră un număr real x și un șir $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_n(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{100-n} \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^n, \forall n \epsilon N$

a) Arătați că există un termen al șirului care este independent de x.

b) Determinați numărul natural n pentru care $a_n\left(\sqrt[10]{2}\right) = 16$.

SUBIECTUL 4

Arătați că :

$$\sum_{k=3}^{n+2} \frac{\log_k n}{\log_{k-1} n} < n, \forall n \epsilon N^*$$

Subiecte propuse de:
prof .Oancia Silvia –C.N Al. I. Cuza, Focşani
prof .Bucur Mioara –C.N Al. I. Cuza, Focşani

Notă:
Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

ROMANIA
MINISTERUL EDUCATIEI NAȚIONALE
COLEGIUL NATIONAL ALEXANDRU IOAN CUZA
Strada Cuza-Voda nr. 47, Focsani 620034, Vrancea, Romania
Tel. 0040.237.226.840 Fax: 0337100243 E-mail: collegecnaic@yahoo.com,Web:www.cnaic.ro

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Vrancea, 16.02.2019

Clasa a X-a filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

1. Fie numarul complex z care verifica relatia $z^2 + z + 1 = 0(*)$.

a) **Să se calculeze $z^{2019} + \frac{1}{z^{2019}}$**

b) **Să se calculeze $z^n + \frac{1}{z^n}$, pentru n numar natural.**

c) **Dacă z_1, z_2 sunt solutiile ecuatiei (*), sa se determine numerele naturale n pentru care are loc egalitatea $z_1{}^n + z_2{}^n = 2$.**

R: a) $z^3 = 1 \Rightarrow z^{2019} + \frac{1}{z^{2019}} = z + \frac{1}{z} = -1$...2p

b) $n = 3k \Rightarrow z^n + \frac{1}{z^n} = 2$...1p

$n = 3k+1 \Rightarrow z^n + \frac{1}{z^n} = -1$...1p

$n = 3k+2 \Rightarrow z^n + \frac{1}{z^n} = -1$...1p

c) $z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{z_1} \Rightarrow$ Ecuatia devine $z^n + \frac{1}{z^n} = 2$...1p

Conforn punctului b) $n = 3k$..1p

2. a) Se considera functiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Să se arate ca daca $f \circ g$ este functie injectiva, atunci g este functie injectiva si daca $f \circ g$ este functie surjectiva, atunci f este functie surjectiva

b) Se considera functia $f : \mathbf{R}\backslash\{4\} \to \mathbf{R}\backslash\{3\}, f(x) = \frac{3x-1}{x-4}$. Aratati ca este functie inversabila si determinati inversa ei.

R: **a)** g este functie injectiva................................ ....1p

f este functie surjectiva..1p

b) f inversabila $\Leftrightarrow f$ bijectiva..1p

injectivitatea...1p

surjectivitatea 1p

inversa $f^{-1} : \mathbf{R}\backslash\{3\} \to \mathbf{R}\backslash\{4\}, f^{-1}(x) = \frac{4x-1}{x-3}$ 2p

3. Se consideră un număr real x și un șir $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_n(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{100-n} \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^n, \forall n \epsilon N$

a) Arătați că există un termen al șirului care este independent de x.

b) Determinați numărul natural n pentru care $a_n\left(\sqrt[10]{2}\right) = 16$.

R: a) $a_n(x) = x^{\frac{100-n}{2}} \cdot x^{\frac{n}{3}} = x^{\frac{300-}{6}}$ 2p

$\frac{300-n}{6} = 0, n = 300, a_{300} - nu\ depinde\ de\ x$..2p

b) $a_n\left(\sqrt[10]{2}\right) = 16 \Leftrightarrow a_n\left(\sqrt[10]{2}\right) = 2^{\frac{300-n}{60}} = 2^4$...2p

$\frac{300-n}{60} = 4, n = 60$..1p

4. Arătați că : $\sum_{k=3}^{n+2} \frac{\log_k n}{\log_{k-1} n} < n, \forall n \epsilon N^*$

$\sum_{k=3}^{n+2} \frac{\log_k n}{\log_{k-1} n} = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{\log_n (k-1)}{\log_n k} <$ 4p

$< 1 + 1 + \cdots + 1 = n$..3p